

Aljabar 1

Batas Pengumpulan = 10 Mei 2023

1. Tentukan apakah pemetaan ϕ adalah homomorfisma atau tidak. Bila ϕ Homomorfisma, maka tentukan $\text{Ker}(\phi)$!

a). $\phi : S_3 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, dimana $\phi(\sigma) = \begin{cases} [0]_2, & \text{bila } \sigma \text{ permutasi genap} \\ [1]_2, & \text{bila } \sigma \text{ permutasi ganjil} \end{cases}$

Anggota $S_3 \rightarrow$

$$\begin{aligned} P_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & P &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & P' &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ N_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & N_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & N_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$$

► Sikel -2 pada anggota-anggota S_3 :

$$P_0 = ()$$

$$P = (1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3)(1 \ 2) = (1 \ 2)(2 \ 3)$$

$$P' = (1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2)(1 \ 3) = (1 \ 3)(3 \ 2)$$

$$N_1 = (2 \ 3)$$

$$N_2 = (1 \ 3)$$

$$N_3 = (1 \ 2)$$

► Jenis Permutasi :

P_0 = Permutasi Genap

P = Permutasi Genap

P' = Permutasi Genap

N_1 = Permutasi Ganjil

N_2 = Permutasi Ganjil

N_3 = Permutasi Ganjil

► Tabel Grup S_3

	P_0	P	P'	N_1	N_2	N_3
P_0	P_0	P	P'	N_1	N_2	N_3
P	P	P'	P_0	N_3	N_1	N_2
P'	P'	P_0	P	N_2	N_3	N_1
N_1	N_1	N_2	N_3	P_0	P	P'
N_2	N_2	N_3	N_1	P'	P_0	P
N_3	N_3	N_1	N_2	P	P'	P_0

Dilihat dari tabel, dapat disimpulkan

→ Anggota yang merupakan permutasi genap dioperasikan (dikomposisi) dengan anggota permutasi genap dihasilkan anggota yang termasuk **PERMUTASI GENAP**

→ Anggota yang merupakan permutasi genap dioperasikan (dikomposisi) dengan anggota permutasi ganjil atau sebaliknya akan dihasilkan anggota yang termasuk **PERMUTASI GANJIL**

→ Anggota yang merupakan permutasi ganjil dioperasikan (dikomposisi) dengan anggota permutasi ganjil dihasilkan anggota yang termasuk **PERMUTASI GENAP**

► Cek Homomorfisma :

→ Ketika Anggota yang permutasi genap dengan permutasi genap :

$$\phi(xy) = [0 + 0]_2$$

$$= [0]_2 + [0]_2$$

$$= \phi(x) + \phi(y)$$

→ Ketika σ ganjil dioperasikan dengan σ ganjil :

$$\phi(xy) = [0]_2$$

$$= [1 + 1]_2$$

$$= [1]_2 + [1]_2$$

$$= \phi(x) + \phi(y)$$

→ Ketika σ genap dioperasikan σ ganjil (x genap) (y ganjil) :

$$\begin{aligned}\phi(xy) &= [1]_2 \\ &= [0 + 1]_2 \\ &= [0]_2 + [1]_2 \\ &= \phi(x) + \phi(y)\end{aligned}$$

→ Ketika x permutasi ganjil dan y permutasi genap :

$$\begin{aligned}\phi(xy) &= [1]_2 \\ &= [1 + 0]_2 \\ &= [1]_2 + [0]_2 \\ &= \phi(x) + \phi(y)\end{aligned}$$

Karena untuk semua kasus terbukti bahwa ϕ homomorfisma, maka terbukti bahwa pemetaan ϕ homomorfisma.

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\phi) &= \{x \in S_3 \mid \phi(x) = e'\} \\ &= \{x \in S_3 \mid \phi(x) = 0\} \\ &= \{x \in S_3 \mid \sigma \text{ permutasi genap}\} \\ &= \{P_0, P, P'\}\end{aligned}$$

b). $\phi : \mathbb{R} \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ adalah grup himp. bilangan riil dg operasi penjumlahan dan $\phi(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \forall x \in \mathbb{R}$

► Cek Homomorfisma :

$$\begin{aligned}\phi(xy) &= \begin{bmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \phi(x)\phi(y) \text{ [Homomorfisma]}\end{aligned}$$

Maka pemetaan ϕ Homomorfisma.

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\phi) &= \{x \in \mathbb{R} \mid \phi(x) = e'\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0\} \\ &= \{0\}\end{aligned}$$

Jadi $\text{Ker}(\phi)$ adalah 0

c). $\phi : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, dimana $\phi([x]_6) = [x]_2, \forall [x]_6 \in \mathbb{Z}_6$

$$\begin{aligned}\phi(x+y) &= [x+y]_2 \\ &= [[x]_6 + [y]_6]_2 \\ &= \phi([x]_6) + \phi([y]_6) \quad (\text{Homomorfisma})\end{aligned}$$

Jadi, pemetaan ϕ adalah Homomorfisma

Cek Kernel :

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\phi) &= \{x \in \mathbb{Z}_6 \mid \phi(x) = e'\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}_6 \mid \phi(x) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}_6 \mid x = 0, 2, 4\} \\ &= \{0, 2, 4\}\end{aligned}$$

2. Hitung nilai Homomorfisma berikut :

a). $\phi(27)$, dimana $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_5$, dengan $\phi(n) = [n]_5, \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\phi(27) = [27]_5$$

$$= 2$$

b). $\phi((12)(231)(23))$ dimana $\phi : S_3 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ dan didefinisikan : $\begin{cases} \phi(\tau) = [0]_2 \rightarrow \tau \text{ perm. genap} \\ \phi(\tau) = [1]_2 \rightarrow \tau \text{ perm. ganjil} \end{cases}$

$$(1\ 2)(2\ 3\ 1)(2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \rho_0$$

$\rho_0 = ()$: Permutasi genap

$$\phi(\rho_0) = [0]_2$$

c). $\phi(5)$ dan $\phi(10)$ di mana $\phi : \mathbb{Z}_{15} \rightarrow \mathbb{Z}_3$, dengan $\phi(1) = 2$

$$\begin{aligned}\phi(5) &= \phi(1+1+1+1+1) \\ &= \phi(1) + \phi(1) + \phi(1) + \phi(1) + \phi(1) \\ &= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(10) &= \phi(5+5) \\ &= \phi(5) + \phi(5) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

3. Misalkan $\phi : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_3$ adalah Homomorfisma dengan

$$\text{Ker}(\phi) = \{[0]_{12}, [3]_{12}, [6]_{12}, [9]_{12}\}$$

dan $\phi([4]_{12}) = [2]_3$. Dapatkan semua $x \in \mathbb{Z}_{12}$ yang memenuhi $\phi(x) = [1]_3$ dan

unjukkan bahwa himpunan $\{x \in \mathbb{Z}_{12} \mid \phi(x) = [1]_3\}$ suatu koset dari $\text{Ker}(\phi)$ dalam $\mathbb{Z}_{12}$!

Jawab : $\{x \in \mathbb{Z}_{12} \mid \phi(x) = [1]_3\}$
 $= \{1, 4, 7, 10\}$

Tunjukkan himp $\{x \in \mathbb{Z}_{12} \mid \phi(x) = [1]_3\}$ koset $\ker(\phi)$ dalam $\mathbb{Z}_{12}$
 Karena $\mathbb{Z}_{12}$ adalah grup, dan $\ker(\phi) < \mathbb{Z}_{12}$, maka untuk sebarang $x \in \mathbb{Z}_{12}$ berlaku,
 $\rightarrow x \cdot \ker(\phi) = \{xa \mid a \in \ker(\phi)\} \rightarrow x = \text{koset kiri dari } \ker(\phi) \text{ dalam } \mathbb{Z}_{12}$,
 $\rightarrow \ker(\phi) \cdot x = \{ax \mid a \in \ker(\phi)\} \rightarrow x = \text{koset kanan dari } \ker(\phi) \text{ dalam } \mathbb{Z}_{12}$,
 Karena x adalah sebarang bilangan dalam $\mathbb{Z}_{12}$, maka dapat disimpulkan bahwasannya
 himpunan $\{x \in \mathbb{Z}_{12} \mid \phi(x) = [1]_3\}$ adalah koset dari $\ker(\phi)$ dalam $\mathbb{Z}_{12}$.

4. Tentukan apakah pemetaan berikut adalah Isomorfisma?

a. $\phi : 2\mathbb{Z} \rightarrow 3\mathbb{Z}$, dimana $\phi(2n) = 3n$

Pembuktian :

① Well Define :

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

$$x = y$$

$$3x = 3y$$

$$\phi(2x) = \phi(2y)$$

② Homomorfisma

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\phi(2(x+y)) = 3(x+y)$$

$$= 3x + 3y$$

$$= \phi(2x) + \phi(2y)$$

$\therefore$ Terbukti Homomorfisma

Karena memenuhi 4 sifat, maka pemetaan ϕ termasuk Isomorfisma.

③ ϕ Satu-satu (Injektif)

$$\ker(\phi) = \{x \in \mathbb{Z} \mid \phi(2x) = e\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} \mid \phi(2x) = 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x = 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 0\}$$

$$= \{0\}$$

④ ϕ pada (surjektif)

$$u \in 3\mathbb{Z} \quad x \in 2\mathbb{Z}$$

$$u = 3x$$

$$u = \phi(2x)$$

b. $\phi : U(10) \rightarrow \mathbb{Z}_4$, dimana $\phi([3]_{10}) = [3]_4$

$$U(10) = \{1, 3, 7, 9\} \quad \mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\rightarrow |U(10)| = 4 \quad |\mathbb{Z}_4| = 4 \quad (\text{Order sama})$$

$$\rightarrow U(10) = \text{Grup Komutatif}$$

$$\mathbb{Z}_4 = \text{Grup Komutatif}$$

$$\rightarrow U(10) \text{ Grup Siklik dengan generator } \langle 3 \rangle$$

$$\mathbb{Z}_4 \text{ Grup Siklik dengan generator } \langle 1 \rangle, \langle 3 \rangle$$

Dapat disimpulkan bahwa pemetaan
 $\phi : U(10) \rightarrow \mathbb{Z}_4$ adalah Isomorfisma grup

5. Tunjukkan bahwa $U(8)$ dan $U(12)$ isomorfik!

$$U(8) = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$U(12) = \{1, 5, 7, 11\}$$

► Tabel Cayley Grup

$U(8)$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$U(12)$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

$$\phi : U(8) \rightarrow U(12)$$

$$\phi(1) = 1$$

$$\phi(3) = 5$$

$$\phi(5) = 7$$

$$\phi(7) = 11$$

Disimpulkan bahwa ϕ onto dan satu-satu.

$$\begin{aligned} \rightarrow x &= y \\ \phi(x) &= \phi(y) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \rightarrow x &= y \\ \phi(x) &= \phi(y) \end{aligned}} \right\} \text{well define}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \phi(x \cdot y) &= [x \cdot y] \\ &= \phi(x) \phi(y) \end{aligned}$$

Terbukti bahwa ϕ Isomorfisme.